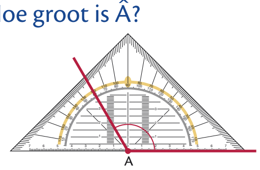
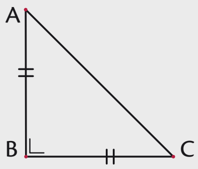
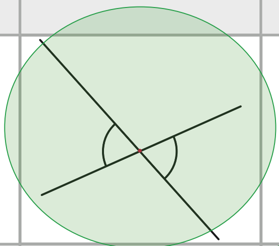
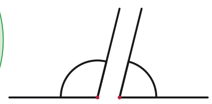
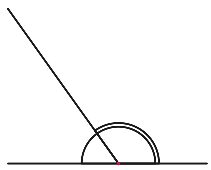
5 Eigenschappen van driehoeken

Dit kun je al

1 een hoek meten
2 de verschillende soorten driehoeken definiëren
3 de verschillende soorten hoeken definiëren
4 de eigenschappen van de verschillende soorten hoeken gebruiken
5 een vergelijking oplossen

Test jezelf

Elke vraag heeft maar één juist antwoord. Controleer je antwoord in de correctiesleutel.
Achter elke vraag staat een verwijzing naar extra oefeningen in je oefenboek of je vademecum.

	A	B	C	VERDER OEFENEN?
1 Hoe groot is $\hat{A}$? 	90°	60°	120°	Vad
2 Wat is de meest passende naam voor de driehoek ABC? 	gelijkbenige, stomphoekige driehoek	rechthoekige, gelijkzijdige driehoek	rechthoekige, gelijkbenige driehoek	Vad
3 In welke figuur vind je overstaande hoeken?				oef. nr. 720
4 Vul aan. Verwisselende binnenhoeken zijn bij evenwijdigen en een snijlijn ...	complementair	even groot	supplementair	oef. nr. 735
5 Los op. $-2x + 5 = -6$	$x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{-11}{2}$	$x = 5{,}5$	oef. nr. 145

Dit heb je nodig

- leerwerkboek p. 99 - 118
- oefenboek nr. 872 - 967
- passer
- geodriehoek
- groene en rode pen
- kleurpotloden

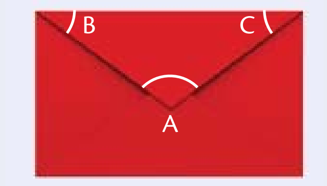
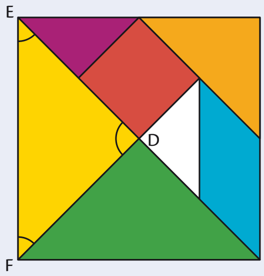
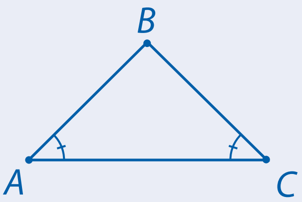
Inhoud

De basishoeken in een gelijkbenige driehoek

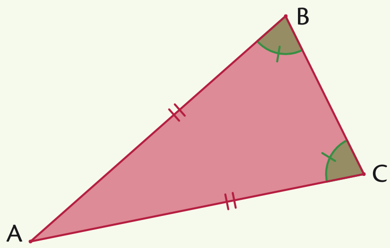
Op verkenning

a **De basishoeken in een gelijkbenige driehoek**

- Vul aan.
  In de gelijkbenige driehoek ABC is Â de ......top...... hoek, B̂ en Ĉ zijn de ......basis...... hoeken.
- Vul de rest van de tabel in.

	$\|\hat{A}\| = 110°$ $\|\hat{B}\| =$ 35° $\|\hat{C}\| =$ 35°	Wat stel je vast? De basishoeken zijn even groot.
	$\|\hat{D}\| = 90°$ $\|\hat{E}\| =$ 45° $\|\hat{F}\| =$ 45°	Wat stel je vast? De basishoeken zijn even groot.
Teken een scherphoekige driehoek met twee even grote hoeken. 	Meet de lengten van de zijden van de driehoek. Noteer op de figuur.	Wat stel je vast? De benen zijn even lang, de driehoek is gelijkbenig.

Eigenschap – de basishoeken in een gelijkbenige driehoek

Een driehoek is gelijkbenig a.s.a. de basishoeken even groot zijn.	In ΔABC geldt: $\|AB\| = \|AC\|$ $\Updownarrow$ $\|\hat{B}\| = \|\hat{C}\|$	

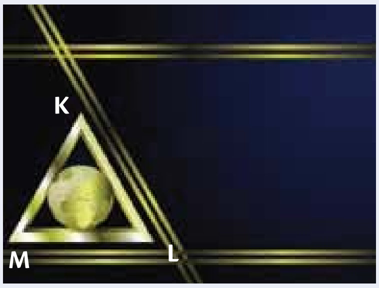
Het bewijs van deze eigenschap vind je in les M31.

CONTROLE 5 Is driehoek STU gelijkbenig als $|\hat{S}| = 70°$ en $|\hat{T}| = 55°$? Verklaar.

$|\hat{U}| = 180° - 70° - 55° = 55°$

De basishoeken zijn even groot, dus de driehoek is gelijkbenig.

b **De hoeken in een gelijkzijdige driehoek**

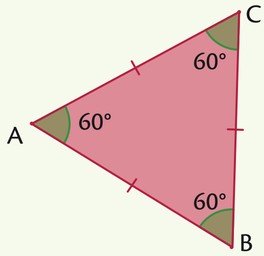


- Noteer de meest passende naam voor de driehoek KLM. *Gelijkzijdige (scherphoekige) driehoek*

  Is deze driehoek ook gelijkbenig? Leg uit. *Ja, want ten minste twee zijden zijn even lang.*
- Bekijk de gelijkbenige driehoek KLM met $\hat{K}$ als tophoek. Wat weet je over de andere hoeken?

  De andere (basis)hoeken zijn even groot, $|\hat{M}| = |\hat{L}|$.
- Bekijk de gelijkbenige driehoek KLM met $\hat{L}$ als tophoek. Wat weet je over de andere hoeken?

  De andere (basis)hoeken zijn even groot, $|\hat{M}| = |\hat{K}|$.
- Wat besluit je over de grootte van de hoeken in een gelijkzijdige driehoek? *Ze zijn allemaal even groot.*
- Vul in: $|\hat{K}| = \frac{180°}{3} = 60°$ $\quad |\hat{L}| = \frac{180°}{3} = 60°$ $\quad |\hat{M}| = \frac{180°}{3} = 60°$

Eigenschap – **de hoeken in een gelijkzijdige driehoek**		
Een driehoek is gelijkzijdig a.s.a. de hoeken even groot zijn.	In driehoek ABC geldt: $\|AB\| = \|BC\| = \|CA\|$ $\Updownarrow$ $\|\hat{A}\| = \|\hat{B}\| = \|\hat{C}\| = \frac{180°}{3} = 60°$	

Het bewijs van die eigenschap vind je in je oefenboek: oef. 951-952.

CONTROLE 6 Is driehoek XYZ gelijkzijdig als $|\hat{X}| = 60°$?

Niet altijd: bv. $|\hat{X}| = 60°$ $\quad |\hat{Y}| = 80°$ $\quad |\hat{Z}| = 40°$

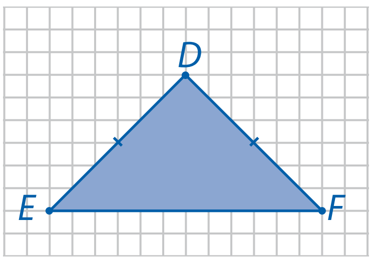
Oefeningen

1
- **Bereken telkens de ontbrekende grootten van de hoeken in de gelijkbenige driehoek DEF.**
- **De hoek D is de tophoek.**
- **Maak eerst een schets.**

WEER? 872 - 874

MEER? 875 - 877

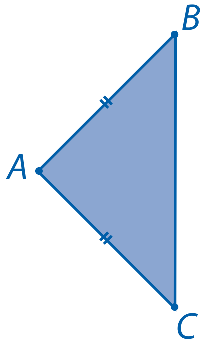
	$\|\hat{D}\|$	$\|\hat{E}\|$	$\|\hat{F}\|$
1	112°	*34°*	*34°*
2	*30°*	*75°*	75°
3	*60°*	60°	*60°*
4	*76°*	*52°*	52°



WEER? 878 879

MEER? 880

2 • **Bereken de hoeken in de gelijkbenige driehoek ABC met A als top.**
$|\hat{A}| = 2|\hat{B}|$
• **Maak eerst een schets.**
• **Los de oefening op met een vergelijking.**



$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$

$\Downarrow$ gegeven

$2|\hat{B}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$

$\Downarrow$ Eig. gelijkbenige driehoek

$2|\hat{B}| + |\hat{B}| + |\hat{B}| = 180°$

$4|\hat{B}| = 180°$

$|\hat{B}| = 180° : 4 = 45°$

$|\hat{C}| = |\hat{B}| = 45°$

$|\hat{A}| = 180° - 45° - 45° = 90°$

Antwoord: $|\hat{A}| = 90°$ $|\hat{B}| = |\hat{C}| = 45°$

Controle: $90° + 45° + 45° = 180°$

WEER? 881

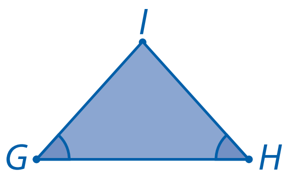
MEER? 882 - 886

3 • **Teken de gelijkbenige driehoek GHI die aan de volgende voorwaarden voldoet.**
basis $|GH| = 2{,}8$ cm
$|\hat{I}| = 84°$
• **Maak eerst de nodige berekeningen.**

$\hat{G}$ en $\hat{H}$ zijn de basishoeken

$\hat{I}$ is de tophoek.

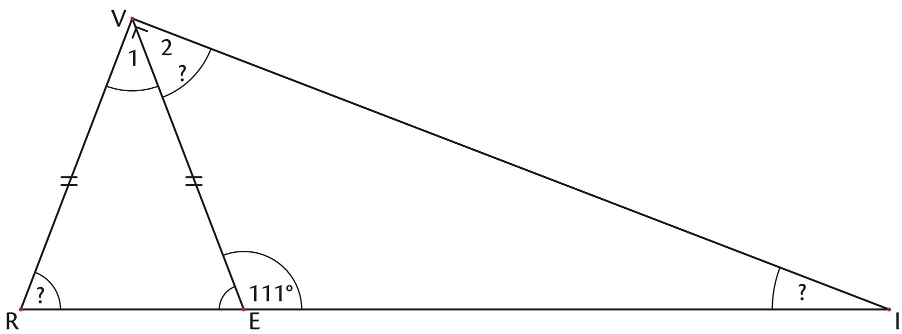
$|\hat{G}| = |\hat{H}| = \dfrac{180° - 84°}{2} = 48°$



WEER? 887

MEER? 888

4 • **Bereken $|\hat{V}_2|$, $|\hat{I}|$ en $|\hat{R}|$.**
• **Toon je berekening en geef telkens een korte verklaring.**



• $|\hat{E}_1| = 180° - 111° = 69°$ (def. nevenhoeken)

• $|\hat{R}| = \hat{E}_1 = 68°$ (Eig. basishoeken in een gelijkbenige driehoek)

• $|\hat{V}_1| = 180° - 69° - 69° = 42°$ (som van de hoeken in driehoek VER)

$|\hat{V}_2| = 90° - 42° = 48°$ (rechte hoek in V)

• $|\hat{I}| = 180° - 111° - 48° = 21°$ (som van de hoeken in driehoek VIE)

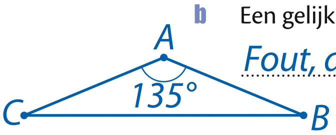
of $|\hat{I}| = 180° - 90° - 69° = 21°$ (som van de hoeken in driehoek VIR)

WEER? 889 890
MEER? 891

5 • **Juist of fout?**
• **Verklaar telkens en teken een tegenvoorbeeld bij de foute uitspraken.**

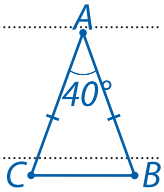
a Een gelijkbenige driehoek kan rechthoekig zijn.
Juist, de tophoek is dan recht.

b Een gelijkbenige driehoek heeft altijd drie scherpe hoeken.
Fout, de tophoek kan ook recht of stomp zijn.



c Gelijkzijdige driehoeken zijn steeds scherphoekig.
Juist, alle hoeken zijn 60°.

d Een gelijkbenige driehoek is ook gelijkzijdig.
Fout, andersom klopt wel altijd.



WEER? 892

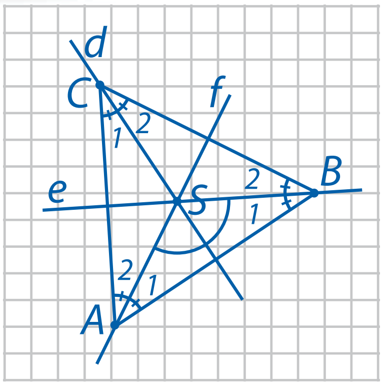
6 • **Construeer in een gelijkzijdige driehoek ABC de drie bissectrices.**
• **Wat stel je vast?**
De bissectrices snijden elkaar in één punt.
• **Noem het snijpunt van de bissectrices S.**
• **Bereken de hoeken in driehoek ABS.**

$|\hat{A}| = |\hat{B}| = |\hat{C}| = 60°$

$|\hat{B}_1| = \frac{60°}{2} = 30°$ (def. bissectrice)

$|\hat{A}_1| = \frac{60°}{2} = 30°$ (def. bissectrice)

$|\hat{S}| = 180° - |\hat{B}_1| - |\hat{A}_1| = 180° - 30° - 30° = 120°$



MEER? 893

7 **ΔABC is gelijkbenig met tophoek A. Bereken de ontbrekende hoekgrootten als…**

a $|\hat{A}| = 50°$

$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{B}| = |\hat{C}|$ (eig. basishoeken gelijkbenige driehoek)
$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{B}| = 180°$
$\Downarrow$
$|\hat{A}| + 2|\hat{B}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{A}| = 50°$
$50° + 2|\hat{B}| = 180°$
$2|\hat{B}| = 180° - 50°$
$2|\hat{B}| = 130°$
$|\hat{B}| = 130° : 2$
$|\hat{B}| = 65°$
Antwoord: $|\hat{B}| = |\hat{C}| = 65°$
Controle: $50° + 65° + 65° = 180°$

b $|\hat{B}| = |\hat{A}| + 30°$

$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{B}| = |\hat{C}|$
$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{B}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{B}| = |\hat{A}| + 30°$
$|\hat{A}| + |\hat{A}| + 30° + |\hat{A}| + 30° = 180°$
$3|\hat{A}| = 180° - 30° - 30°$
$|\hat{A}| = 120° : 3 = 40°$
$|\hat{B}| = |\hat{C}| = 70°$
Antwoord: $|\hat{A}| = 40°$
$|\hat{B}| = |\hat{C}| = 70°$
Controle: $40° + 70° + 70° = 180°$

c $|\hat{B}| = \frac{1}{3}|\hat{A}|$

$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{B}| = |\hat{C}|$
$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{B}| = 180°$
$\Downarrow |\hat{B}| = \frac{1}{3}|\hat{A}|$
$|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}| = 180°$
$3\left(|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}|\right) = 180° \cdot 3$
$3|\hat{A}| + |\hat{A}| + |\hat{A}| = 540°$
$5|\hat{A}| = 540°$
$|\hat{A}| = 540° : 5$
$|\hat{A}| = 108°$
$|\hat{B}| = \frac{1}{3}|\hat{A}| = \frac{1}{3} \cdot 108° = 36°$
Antwoord: $|\hat{A}| = 108°$
$|\hat{B}| = |\hat{C}| = 36°$
Controle: $108° + 36° + 36° = 180°$

Wat moet je kunnen?

- ☐ de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek verwoorden
- ☐ de eigenschap van de hoeken van een gelijkzijdige driehoek verwoorden

Een buitenhoek van een driehoek (uitbreiding)

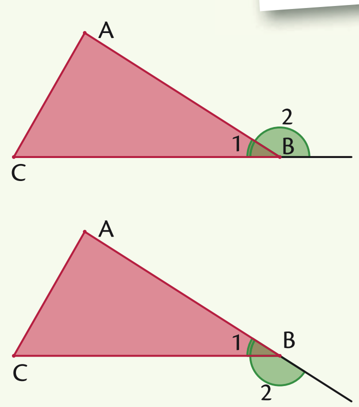
Op verkenning

a Een buitenhoek van een driehoek

- Teken [CB.
  - De binnenhoek van de driehoek in het hoekpunt B noem je $\hat{B}_1$.
  - De nevenhoek van $\hat{B}_1$ noem je $\hat{B}_2$.
- Teken een nevenhoek van $\hat{C}$. Hoeveel oplossingen heb je? *Twee*

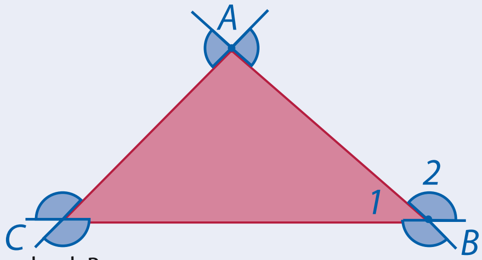
DEFINITIE

Wiskundetaal – definitie

Een **buitenhoek van een driehoek** is een nevenhoek van een binnenhoek van de driehoek.	In driehoek ABC is $\hat{B}_2$ een buitenhoek. a. s. a. $\hat{B}_1$ en $\hat{B}_2$ zijn aanliggende hoeken $\lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{B}_2\rvert = 180°$	

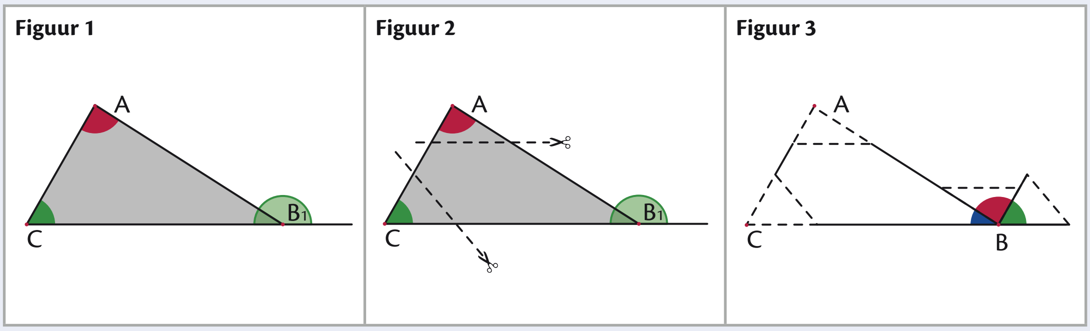
- Teken alle buitenhoeken van driehoek ABC.

  Hoeveel buitenhoeken tel je? *6*



b Eigenschap van een buitenhoek van een driehoek

- Opdracht
  - Teken een driehoek ABC op een blad papier. Teken een buitenhoek B_1.
  - Kleur de hoeken A en C in de driehoek in een verschillende kleur.
  - Knip de driehoek ABC met zijn buitenhoek B_1 uit, zoals aangegeven op figuur 1.
  - Knip de hoeken A en C af, zoals aangegeven op figuur 2.
  - Leg deze afgeknipte hoeken, netjes aansluitend met de gekleurde hoekpunten tegen elkaar op hoek B_1.

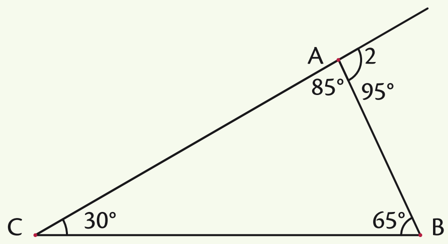


- Wat stel je vast?

  De twee afgeknipte hoeken passen precies op de buitenhoek $\hat{B}_1$.
- Wat vermoed je?

  Een buitenhoek is even groot als *de som van de twee niet-aanliggende hoeken.*
- Is er iemand in de klas die een driehoek kan tekenen waarbij dit niet zo is? *Neen*

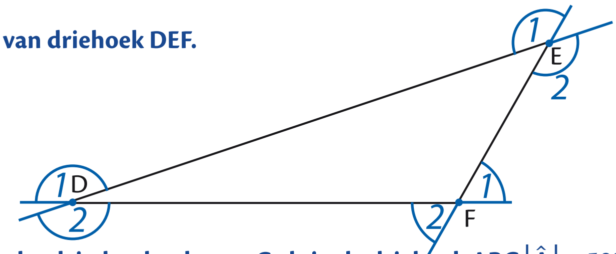
Eigenschap – een buitenhoek van een driehoek

Een **buitenhoek** van een driehoek is even groot als de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.	$\hat{A}_2$ is een buitenhoek van ΔABC $\Downarrow$ $\lvert\hat{A}_2\rvert = \lvert\hat{B}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$	 $\lvert\hat{A}_2\rvert = 65° + 30° = 95°$

Het bewijs van deze eigenschap vind je in les M32.

Oefeningen

8 **Teken alle buitenhoeken van driehoek DEF.**



WEER? 894 - 896
MEER? 897 898

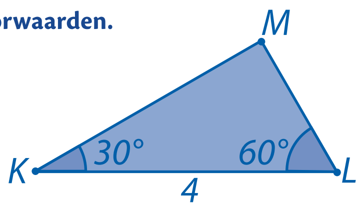
9 • **Hoe groot is de buitenhoek in het hoekpunt C als in de driehoek ABC $\lvert\hat{A}\rvert = 50°$ en $\lvert\hat{B}\rvert = 44°$?**
• **Toon je berekening.**

$\lvert\hat{C}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{B}\rvert$ (Eig. buitenhoek van een driehoek)

$\lvert\hat{C}_2\rvert = 50° + 44° = 94°$

WEER? 899 - 901
MEER? 902 - 905

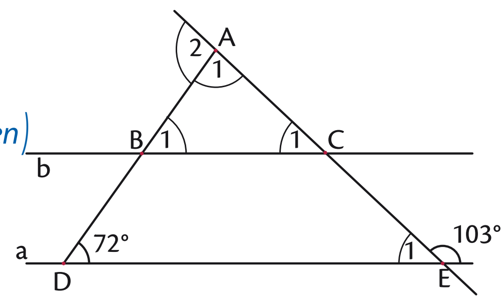
10 • **Teken de driehoek KLM die voldoet aan de volgende voorwaarden.**
$\lvert KL\rvert = 4$ cm
$\lvert\hat{K}\rvert = 30°$
buitenhoek $\lvert\hat{L}_2\rvert = 120°$
• **Maak eerst de nodige berekening.**



$\lvert\hat{L}\rvert = 180° - 120° = 60°$

WEER? 906
MEER? 907 908

11 • **Bereken $\lvert\hat{A}_1\rvert$, $\lvert\hat{A}_2\rvert$ en $\lvert\hat{C}_1\rvert$ als je weet dat a // b.**
• **Toon je berekening en geef telkens een korte verklaring.**



$\lvert\hat{E}_1\rvert = 180° - 103° = 77°$ ($\lvert\hat{C}\rvert = \lvert\hat{E}_1\rvert$ def. nevenhoeken)
(eig. overeenkomstige hoeken)

$\lvert\hat{B}_1\rvert = \lvert\hat{D}\rvert = 72°$
(eig. overeenkomstige hoeken)

$\lvert\hat{A}_1\rvert = 180° - \lvert\hat{B}_1\rvert - \lvert\hat{C}_1\rvert = 180° - 72° - 77° = 31°$ (eig. som van de hoeken in ΔABC)

$\lvert\hat{A}_2\rvert = 180° - \lvert\hat{A}_1\rvert = 180° - 31° = 149°$ (def. buitenhoek van een driehoek)

WEER? 909
MEER? 910 - 914

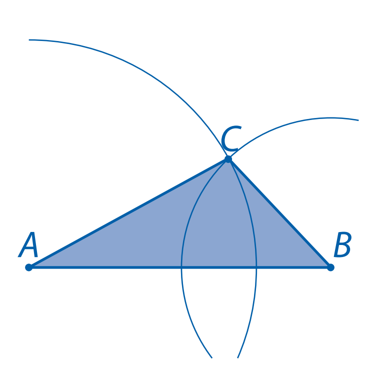
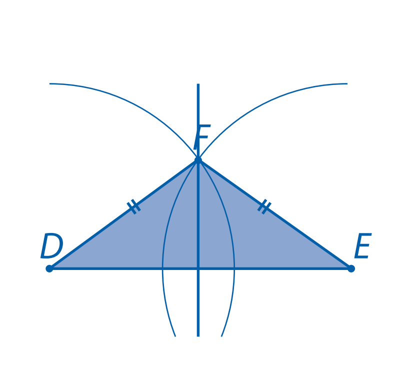
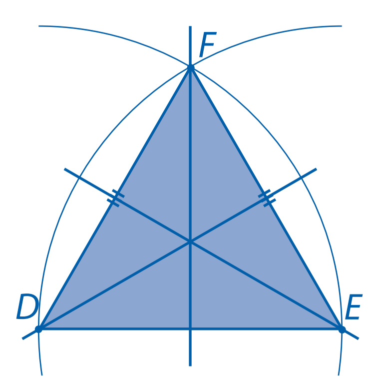
Wat moet je kunnen?

☐ een buitenhoek van een driehoek herkennen
☐ de eigenschap van een buitenhoek van een driehoek verwoorden

M29 Constructie en classificatie van driehoeken

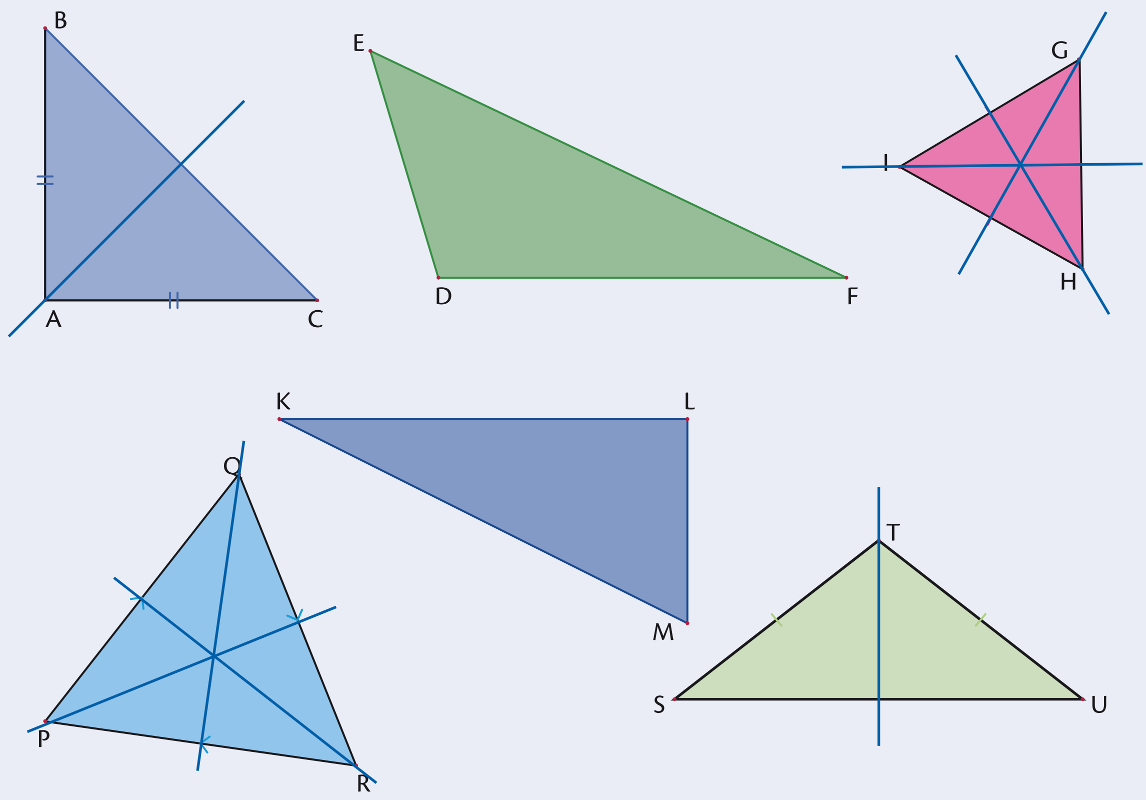
Op verkenning

a **Constructie van driehoeken**

Construeer een ongelijkbenige driehoek ABC met zijden van 4 cm, 2 cm en 3 cm.	Construeer een gelijkbenige driehoek DEF met een basis van 4 cm en opstaande zijden van 3 cm.	Construeer een gelijkzijdige driehoek GHI met een zijde van 4 cm.
		

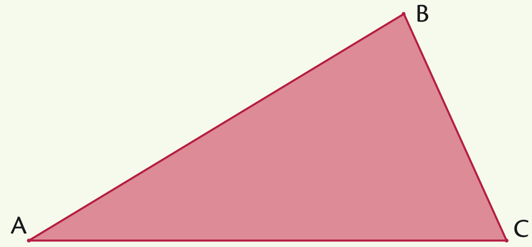
b **Classificatie van driehoeken**

- Teken in de bovenstaande driehoeken alle mogelijke symmetrieassen.
  - Hoeveel symmetrieassen heeft de ongelijkbenige driehoek ABC? 0
  - Hoeveel symmetrieassen heeft de gelijkbenige driehoek DEF? 1
  - Hoeveel symmetrieassen heeft de gelijkzijdige driehoek GHI? 3
- Teken ook in de volgende driehoeken alle mogelijke symmetrieassen.

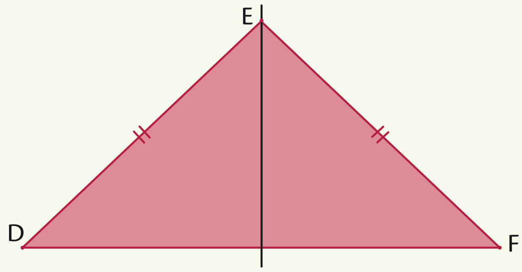


Overzicht – classificatie van driehoeken op basis van de symmetrieassen

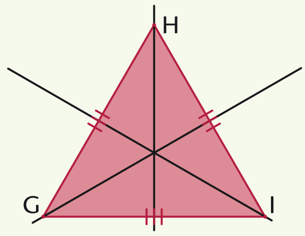
Een ongelijkbenige driehoek heeft geen symmetrieassen.



Een gelijkbenige driehoek die niet gelijkzijdig is, heeft één symmetrieas.



Een gelijkzijdige driehoek heeft drie symmetrieassen.



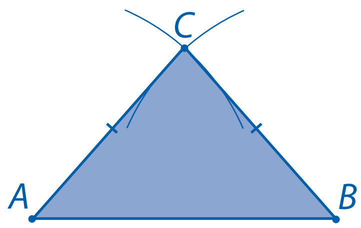
Oefeningen

12 Construeer de gevraagde driehoeken.

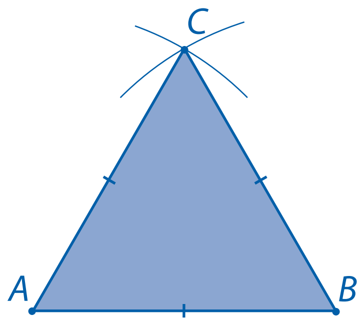
WEER? 915 - 932

MEER? 933 - 938

a Construeer een gelijkbenige driehoek ABC met een basis van 4 cm en opstaande zijden van 3 cm.



b Construeer de driehoek ABC met een zijde van 4 cm en drie symmetrieassen.



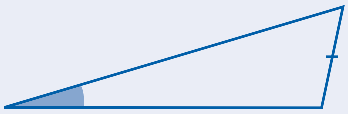
Wat moet je kunnen?

- ☐ een driehoek construeren die aan bepaalde voorwaarden voldoet
- ☐ driehoeken classificeren op basis van het aantal symmetrieassen

Op verkenning

a **Het verband tussen de hoeken en zijden in een driehoek (uitbreiding).**

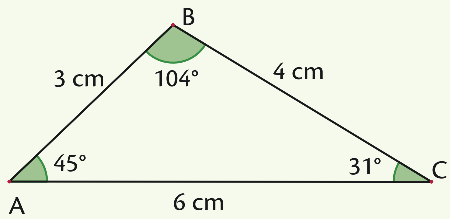
- Noteer van driehoek ABC:
  - de grootste hoek $\hat{A}$
  - de langste zijde [CB]
  - de kleinste hoek $\hat{B}$
  - de kortste zijde [AC]
- Bestaat er een verband tussen de grootte van de hoeken en de lengte van de zijden?
  - Welke zijde staat tegenover de grootste hoek? De langste zijde
  - Welke zijde staat tegenover de kleinste hoek? De kortste zijde
  - Vul aan. Tegenover de grootste hoek ligt de langste zijde.
- Teken een ongelijkbenige driehoek.
  - Markeer in de driehoek de kleinste hoek.
  - Markeer in de driehoek de kortste zijde.
  - Bestaat er een verband tussen beide?



De kleinste hoek ligt tegenover de kortste zijde en omgekeerd.

Eigenschap – verband tussen de hoeken en zijden in een driehoek (uitbreiding)

In elke driehoek ligt tegenover een grotere hoek een grotere zijde en omgekeerd.

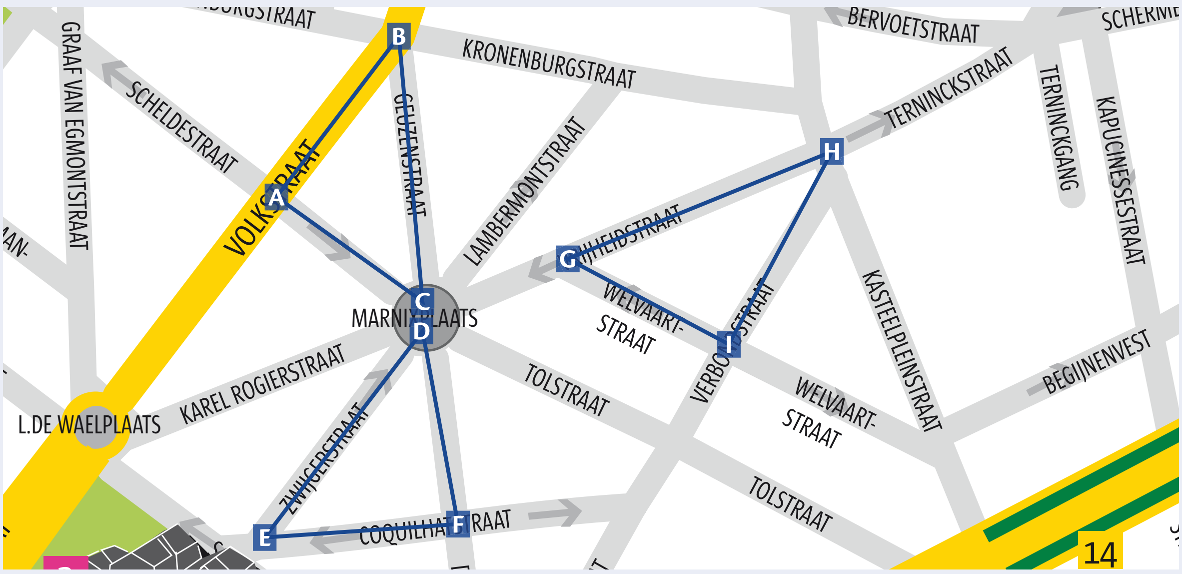


$|AB| < |BC| \Leftrightarrow |\hat{C}| < |\hat{A}|$

Het bewijs van deze eigenschap vind je in les M33.

CONTROLE 7 In de driehoek PQR is [QR] de langste zijde. Welke hoek is de grootste hoek van de driehoek? $\hat{P}$

b **Driehoeksongelijkheid**

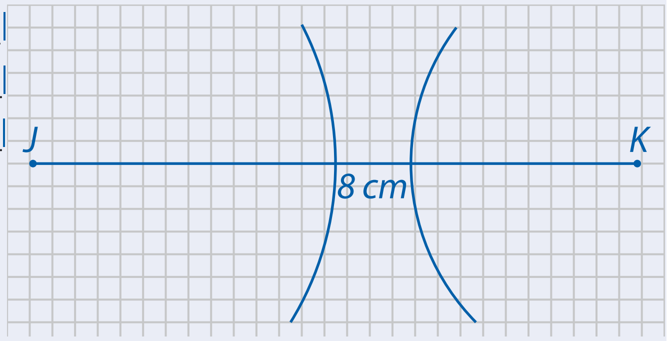


- Meet in elke driehoek de lengte van de zijden.

ΔABC	ΔDEF	ΔGHI
|AC| = 2,3 cm	|DE| = 3,2 cm	|IH| = 2,7 cm
|AB| + |BC| = 5,9 cm	|EF| + |FD| = 4,9 cm	|IG| + |GH| = 5,8 cm

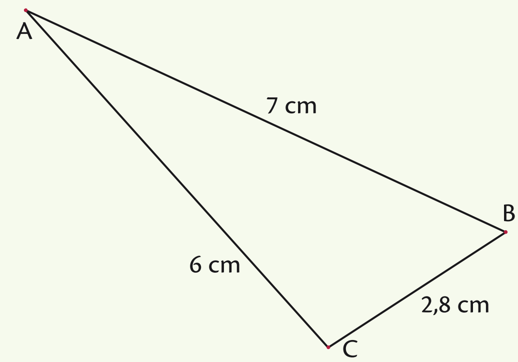
- Vul aan.
  - De lengte van een zijde is steeds kleiner dan de som van de lengten van de twee andere zijden.
  - In de driehoek XYZ is |XY| < |YZ| + |ZX|
    en |YZ| < |XY| + |ZX|
    en |ZX| < |XY| + |YZ|

- Construeer de driehoek JKL.
  |JK| = 8 cm
  |KL| = 4 cm
  |LM| = 3 cm
  Wat stel je vast?



De driehoek kun je niet construeren. De passerbogen snijden elkaar niet.

Eigenschap – driehoeksongelijkheid

In een driehoek is de lengte van een zijde altijd kleiner dan de som van de lengten van de andere twee zijden.	In driehoek ABC geldt: |AB| < |BC| + |CA| |BC| < |AB| + |CA| |CA| < |AB| + |BC|	7 cm < 2,8 cm + 6 cm 2,8 cm < 7 cm + 6 cm 6 cm < 7 cm + 2,8 cm 

Het bewijs van deze eigenschap vind je in les M34.

Oefeningen

13 **Benoem telkens de grootste hoek van de driehoeken.**

WEER? 939 - 943
MEER? 944 - 948

DRIEHOEK ABC	|AB| = 4,5 cm	|BC| = 5,2 cm	|CA| = 4,8 cm	De grootste hoek is Â.
DRIEHOEK DEF	|DE| = 7,2 cm	|EF| = 3,6 cm	|FD| = 8 cm	De grootste hoek is Ê.
DRIEHOEK GHI	|GH| = 3,4 cm	|HI| = 3 cm	|IG| = 3,4 cm	De grootste hoek en zijn Ĥ en Î.

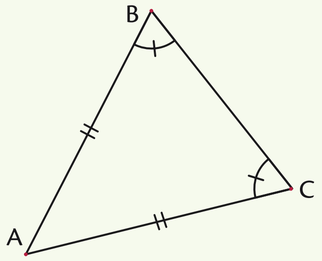
Vul aan en controleer.

In ΔABC: |BC| < |AB| + |CA| Controle: 5,2 cm < 4,5 cm + 4,8 cm

Wat moet je kunnen?

☐ de driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verwoorden

Bewijs: de eigenschap van de basishoeken in een gelijkbenige driehoek

Eigenschap – de basishoeken in een gelijkbenige driehoek		
Een driehoek is gelijkbenig a.s.a. de basishoeken even groot zijn.	In driehoek ABC geldt: $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert$ $\Updownarrow$ $\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$	

STAP 1 **Verkennen**

- Lees de eigenschap aandachtig en vul aan.
  In de eigenschap zie je een dubbele pijl. Dit betekent *dat de eigenschap uit twee delen bestaat.*

  Deel1: $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert \Rightarrow \lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$ lees je als:

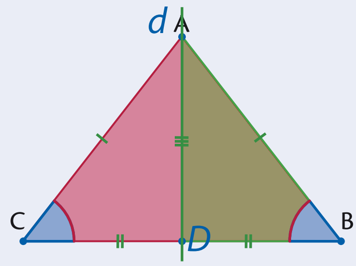
  Als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de basishoeken even groot.

  Deel2: $\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert \Rightarrow \lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert$ lees je als:

  Als de basishoeken van een driehoek even groot zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.
- Je bewijst eerst deel 1 (basis) en dan deel 2 (verdieping).

DEEL 1 **EIGENSCHAP** **Als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de basishoeken even groot**

STAP 2 **Analyseren: vooruitdenken – terugdenken – een plan maken**



VRAAG	ANTWOORD	VERKLARING
Wat is gegeven? • Noteer dit in symbolen. • Duid het gegeven in het groen aan op de figuur.	*ΔABC* *$\lvert AC\rvert=\lvert AB\rvert$*	
Wat moet je bewijzen? • Noteer dit in symbolen. • Duid wat bewezen moet worden in het rood aan op de figuur.	$\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$	
Hoe kun je aantonen dat hoeken even groot zijn?	*Via congruente driehoeken*	*In congruente driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken even groot.*
Welke bijzondere rechte m verdeelt driehoek ABC in twee congruente driehoeken? Er zijn verschillende mogelijkheden. Noem D het snijpunt van de rechte m met de basis.	*m is de zwaartelijn uit de top*	

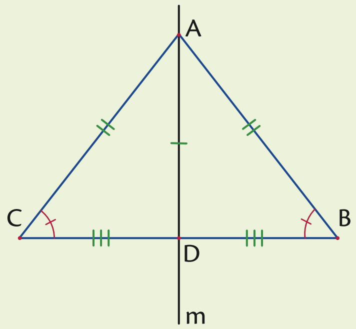
• Noteer en kleur de driehoeken waarvan je vermoedt dat ze congruent zijn, elk in een andere kleur.	*Δ ADC en Δ ADB*	
Welk congruentiekenmerk kun je gebruiken? • Noteer de gelijkheden.	*ZZZ* *Z* $\lvert DC\rvert = \lvert DB\rvert$ *Z* $\lvert AD\rvert = \lvert AD\rvert$ *Z* $\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$	*Def. zwaartelijn* *Gemeensch. zijde* *Def. gelijkbenige driehoek*
Is dit wat je moet bewijzen? Indien niet, welke stap moet je nog zetten?	$\Delta ADC \cong \Delta ADB$ *Neen, hieruit volgt* $\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$.	*Uit het voorgaande afleiden dat basishoeken even groot zijn.*

STAP 3 **Bewijs**

DEEL 1

Bewijs (deel 1) – als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de basishoeken even groot

Gegeven: ΔABC
$\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert$



Te bewijzen: $\lvert\hat{C}\rvert = \lvert\hat{B}\rvert$

Bewijs: Je hebt verschillende mogelijkheden.

mogelijkheid:
Teken de zwaartelijn m uit de top. Noem D het snijpunt met [BC].

Voor ΔADC en ΔADB geldt:

Z $\lvert CD\rvert = \lvert DB\rvert$ (def. zwaartelijn)
Z $\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$ (def. gelijkbenige driehoek)
Z $\lvert AD\rvert = \lvert AD\rvert$ (gemeenschappelijke zijde)

$\Downarrow$ ZZZ

$\Delta ADC \cong \Delta ADB$

$\Downarrow$ Eig. overeenkomstige hoeken in congruente driehoeken

$\lvert\hat{C}\rvert = \lvert\hat{B}\rvert$

De andere mogelijkheden om deze eigenschap te bewijzen vind je in het oefenboek: oef. 949.

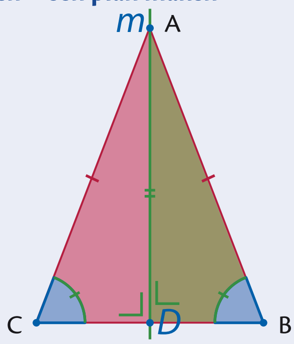
Bewijs: de eigenschap van de basishoeken in een gelijkbenige driehoek (vervolg)

DEEL 2

EIGENSCHAP **Als de basishoeken in een driehoek even groot zijn, dan is de driehoek gelijkbenig**

STAP 2

Analyseren: vooruitdenken – terugdenken – een plan maken



VRAAG	ANTWOORD	VERKLARING
Wat is gegeven? • Noteer dit in symbolen. • Duid het gegeven in het groen aan op de figuur.	ΔABC $\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$	
Wat moet je bewijzen? • Noteer dit in symbolen. • Duid wat bewezen moet worden in het rood aan op de figuur.	$\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$	
Hoe kun je aantonen dat zijden even lang zijn?	*Via congruente driehoeken*	*In congruente driehoeken zijn de overeenkomstige zijden even lang.*
Welke bijzondere rechte m verdeelt de driehoek ABC in twee driehoeken waarvan je vermoedt dat ze congruent zijn? Er zijn verschillende mogelijkheden. Noem het snijpunt van de rechte h met de basis D.	*m is de hoogtelijn uit de top*	
• Noteer en kleur de driehoeken waarvan je vermoedt dat ze congruent zijn, elk in een andere kleur.	ΔADC *en* ΔADB	
Welk congruentiekenmerk kun je gebruiken? • Noteer de gelijkheden.	*ZHH* *Z* $\lvert AD\rvert = \lvert AD\rvert$ *H* $\lvert\hat{B}\rvert = \lvert\hat{C}\rvert$ *H* $\lvert\hat{D}_1\rvert = \lvert\hat{D}_2\rvert = 90°$	*Gemeensch. zijde* *Gegeven* *Def. hoogtelijn*
Is dit wat je moet bewijzen? Indien niet, welke stap moet je nog zetten?	$\Delta ADC \cong \Delta ADB$ *Neen, hieruit volgt* $\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$.	*Ui het voorgaande afleiden dat de opstaande zijden even lang zijn.*

STAP 3

Bewijs

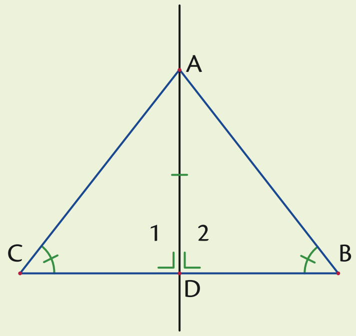
Bewijs (deel 2) – als een driehoek even grote basishoeken heeft, is de driehoek gelijkbenig

Gegeven: ΔABC
$|\hat{B}| = |\hat{C}|$

Te bewijzen: $|AB| = |AC|$

Bewijs: Je hebt verschillende mogelijkheden.

Bv.:
Teken de hoogtelijn m uit de top.
Noem D het snijpunt met [BC].



Voor ΔADC en ΔADB geldt:

H $|\hat{B}| = |\hat{C}|$ (gegeven)
H $|\hat{D}_1| = |\hat{D}_2| = 90°$ (def. hoogtelijn)
Z $|AD| = |AD|$ (gemeensch. zijde)

$\Downarrow$ HHZ

$\Delta ADB \cong \Delta ADC$

$\Downarrow$ Eig. overeenkomstige zijden in congruente driehoeken

$|AB| = |AC|$

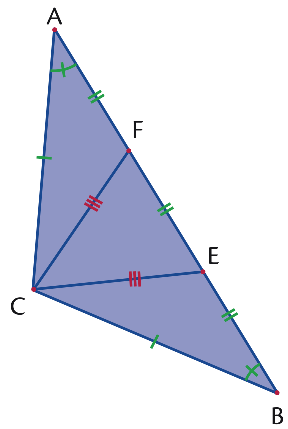
Andere mogelijkheden om deze eigenschappen te bewijzen, vind je in het oefenboek: oef. 950.

Oefeningen

14 **ΔABC is gelijkbenig met tophoek C.**
[AB] wordt in drie gelijke delen verdeeld.
Bewijs dat $|CE| = |CF|$

WEER? 949 - 957

MEER? 958 - 967



Gegeven: ΔABC
$|AC| = |BC|$
$|AF| = |FE| = |EB|$

Te bewijzen: $|CE| = |CF|$

Bewijs: Voor ΔACF en ΔBCE geldt:

Z $|AC| = |BC|$ *(def. gelijkbenige driehoek)*
H $|\hat{A}| = |\hat{B}|$ *(eig. gelijkbenige driehoek)*
Z $|AF| = |EB|$ *(geg.)*

$\Downarrow$ ZHZ

$\Delta ACF \cong \Delta BCE$

$\Downarrow$ *Eig. overeenkomstige hoeken in congruente driehoeken*

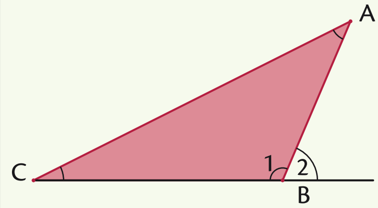
$|CF| = |CE|$

Wat moet je kunnen?

☐ de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen

Bewijs: de eigenschap van een buitenhoek van een driehoek (uitbreiding)

Eigenschap – een buitenhoek van een driehoek

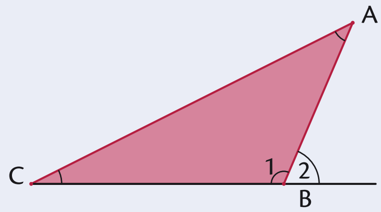
Een **buitenhoek** van een driehoek is even groot als de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.	$\hat{B}_2$ is een buitenhoek van ΔABC. $\Downarrow$ $\lvert\hat{B}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$	

STAP 1 **Verkennen**

- Lees de eigenschap aandachtig.
  Welke meetkundige elementen komen er in voor?
  Een buitenhoek van een driehoek en twee niet-aanliggende binnenhoeken.

STAP 2 **Analyseren: vooruitdenken – terugdenken – een plan maken**

- Onderzoek de eigenschap voor de buitenhoek B_2 .
  Je kunt deze eigenschap natuurlijk ook met een andere buitenhoek onderzoeken.



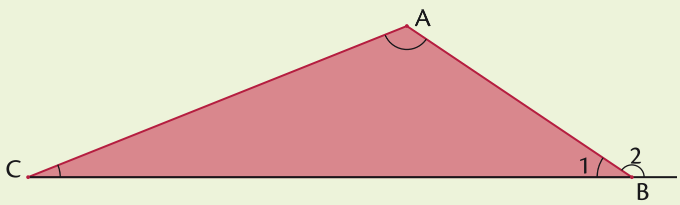
VRAAG	ANTWOORD	VERKLARING
Wat is gegeven?	*ΔABC* *$\hat{B}_2$ is een buitenhoek van ΔABC*	
Wat moet je bewijzen? • Noteer dit in symbolen.	$\lvert\hat{B}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$	
Welke eigenschap ken je al over de som van de hoeken in ΔABC? • Noteer dit in symbolen.	$\lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{C}\rvert = 180°$ ❶	*Eig. de som van de hoeken van een driehoek is 180°.*
Hoe groot is de som van $\lvert\hat{B}_1\rvert$ en $\lvert\hat{B}_2\rvert$?	$\lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{B}_2\rvert =$ *180°* ❷	*Def. buitenhoek van een driehoek*
Uitdrukking ❶ = uitdrukking ❷. • Noteer dit in symbolen.	$\lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{C}\rvert = \lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{B}_2\rvert$	*(1) en (2)*

Zoek uit deze vergelijking de grootte van de buitenhoek $\hat{B}_2$.	$\lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert = \lvert\hat{B}_2\rvert$	*Eig. van gelijkheden: beide leden verminderd met* $\lvert\hat{B}_1\rvert$
Is dit wat je moet bewijzen?	*Ja*	

STAP 3 **Bewijs**

Bewijs – een buitenhoek van een driehoek is even groot als de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken van die driehoek

Gegeven: driehoek ABC
buitenhoek $\hat{B}_2$



Te bewijzen: $\lvert\hat{B}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$

Bewijs: ❶ $\lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{B}_2\rvert = 180°$ (def. nevenhoeken)

❷ $\lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{C}\rvert = 180°$ (eig. som van de hoeken in een driehoek)

$\Downarrow$ ❶ + ❷

$\lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{B}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{B}_1\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$

$\Downarrow$ Eig . van een gelijkheid beide leden $- \lvert\hat{B}_1\rvert$

$\lvert\hat{B}_2\rvert = \lvert\hat{A}\rvert + \lvert\hat{C}\rvert$

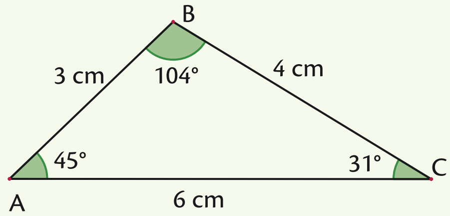
Wat moet je kunnen?

☐ de eigenschap van een buitenhoek van een driehoek bewijzen

Bewijs: het verband tussen de hoeken en de zijden in een driehoek (uitbreiding)

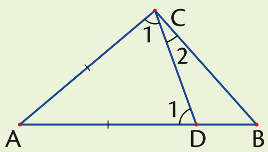
Eigenschap – verband tussen de hoeken en zijden in een driehoek (uitbreiding)

In elke driehoek ligt tegenover een grotere hoek een grotere zijde en omgekeerd.



$|AB| < |BC| \Leftrightarrow |\hat{C}| < |\hat{A}|$

Bewijs (deel 1) – in een driehoek ligt tegenover een grotere zijde een grotere hoek



Gegeven: ΔACB
$|AB| > |AC|$

Te bewijzen: $|\hat{C}| > |\hat{B}|$

Bewijs: Als $|AB| > |AC|$ dan kun je op [AB] een punt D vinden zodat ΔACD een gelijkbenige driehoek is.

❶ In ΔACD is $|\hat{C}_1| = |\hat{D}_1|$ en (eig. basishoeken in een gelijkbenige driehoek).
❷ in ΔCDB is $|\hat{D}_1| > |\hat{B}|$ (eig. buitenhoek van de driehoek $|\hat{D}_1| = |\hat{C}_2| + |\hat{B}|$)

$\Downarrow$ ❶ en ❷

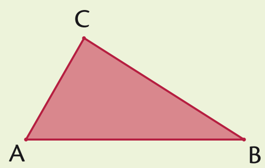
$|\hat{C}_1| > |\hat{B}|$

$\Downarrow$ $|\hat{C}_1| + |\hat{C}_2| = |\hat{C}|$ het geheel is altijd groter dan het deel

$|\hat{C}| > |\hat{B}|$

- Waarom wordt in de eerste stap van het bewijs gesproken over een gelijkbenige driehoek?
  In een gelijkbenige driehoek liggen tegenover even lange zijden even grote hoeken en omgekeerd.

Bewijs (deel 2) – in een driehoek ligt tegenover een grotere hoek een grotere zijde



Gegeven: ΔACB
$|\hat{C}| > |\hat{B}|$

Te bewijzen: $|AB| > |AC|$

Bewijs: Bewijs uit het ongerijmde
Stel dat $|AB|$ niet groter is dan $|AC|$. Dan heb je twee andere mogelijkheden:
❶ Stel dat $|AB| = |AC|$, dan zou ΔACB gelijkbenig zijn en de hoeken B en C even groot.
Dit is in tegenspraak met het gegeven.
❷ Stel dat $|AB| < |AC|$, dan zou volgens het eerste deel van het bewijs $|\hat{C}| < |\hat{B}|$.
Dit is in tegenspraak met het gegeven.
Er blijft dus maar één mogelijkheid over:
$|AB| > |AC|$

- Wat is een bewijs uit het ongerijmde?
  In plaats van de eigenschap rechtstreeks te bewijzen, ga je bewijzen dat elke andere mogelijkheid niet kan.
- In het bewijs uit het ongerijmde worden drie mogelijkheden bekeken. Welke?
  $|AB| = |AC|$ $|AB| < |AC|$ $|AB| > |AC|$

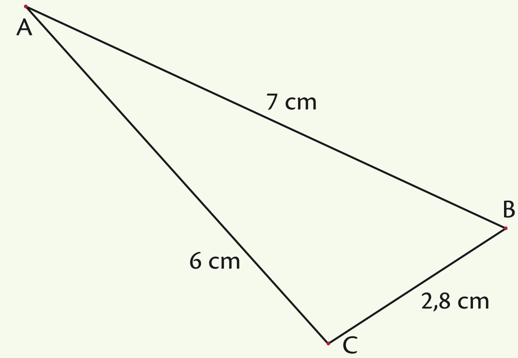
Wat moet je kunnen?

☐ de eigenschap van het verband tussen hoeken en zijden in een driehoek bewijzen

Bewijs: de driehoeksongelijkheid

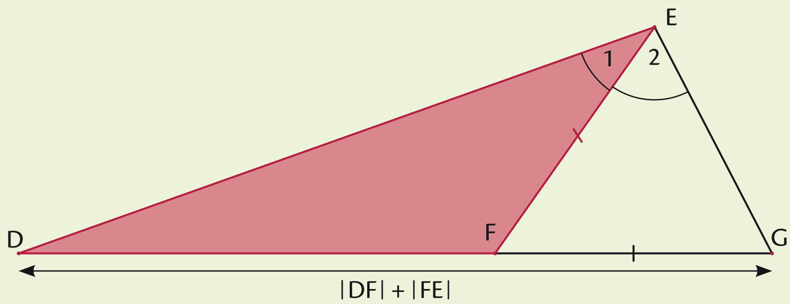
Eigenschap – driehoeksongelijkheid

In een driehoek is de lengte van een zijde altijd kleiner dan de som van de lengten van de andere twee zijden.	In driehoek ABC geldt: $\lvert AB\rvert < \lvert BC\rvert + \lvert CA\rvert$ $\lvert BC\rvert < \lvert AB\rvert + \lvert CA\rvert$ $\lvert CA\rvert < \lvert AB\rvert + \lvert BC\rvert$	7 cm < 2,8 cm + 6 cm 2,8 cm < 7 cm + 6 cm 6 cm < 7 cm + 2,8 cm



Bewijs – in een driehoek is de lengte van een zijde kleiner dan de som van de lengten van de andere twee zijden

Gegeven: ΔDEF



Te bewijzen: $\lvert DE\rvert < \lvert DF\rvert + \lvert FE\rvert$

Bewijs:

❶ Je maakt de som $\lvert DF\rvert + \lvert FE\rvert$ zichtbaar op de tekening:
Je verlengt [DF] met [FG] zodat $\lvert DF\rvert + \lvert FG\rvert = \lvert DG\rvert$ (met $\lvert EF\rvert = \lvert FG\rvert$).

❷ $\lvert \hat{E}_2\rvert = \lvert \hat{G}\rvert$ (eig. basishoeken in gelijkbenige driehoek)
en $\lvert \hat{E}\rvert > \lvert \hat{E}_2\rvert$ (het geheel is altijd groter dan het deel want $\lvert \hat{E}\rvert = \lvert \hat{E}_1\rvert + \lvert \hat{E}_2\rvert$)
dus is $\lvert \hat{E}\rvert > \lvert \hat{G}\rvert$

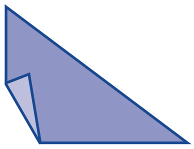
❸ In ΔDEG ligt tegenover een grotere hoek een grotere zijde:
$\lvert DG\rvert > \lvert DE\rvert$ of $\lvert DF\rvert + \lvert FE\rvert > \lvert DE\rvert$

- Waarom wordt er in de eerste stap van het bewijs gesproken over een gelijkbenige driehoek?
  In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken even groot. Zo kun je de hoeken vergelijken.

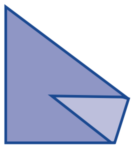
Wat moet je kunnen?

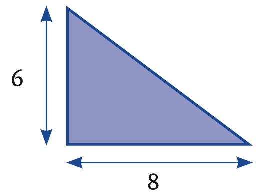
☐ de driehoeksongelijkheid bewijzen/verklaren

1 **Gamal knipt uit een vel papier een driehoek. Twee zijden van zijn driehoek zijn 6 cm en 8 cm, de hoek tussen deze zijden is een rechte hoek. Hij gaat de driehoek één keer vouwen en kan zo verschillende figuren vormen**
Bijvoorbeeld:



of

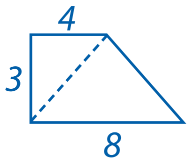




Welke van de volgende getallen kan de oppervlakte van een figuur zijn?

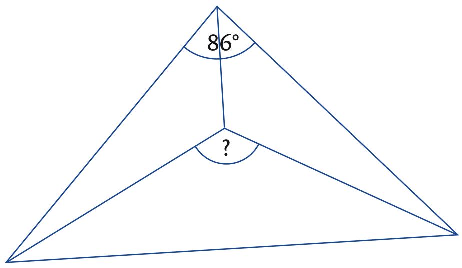
A 9 cm² **B** 12 cm² **C** 18 cm² **D** 24 cm² **E** 30 cm²

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{6 \cdot 8}{2}$ cm² = 24 cm². De oppervlakte van de figuur is minder, maar zeker meer dan de helft (je kunt deze driehoek niet precies op zichzelf vouwen). Een ongelijkbenige driehoek heeft geen symmetrieassen. De oppervlakte kan inderdaad 18 cm² zijn, zoals de figuur hiernaast laat zien.



$\frac{(8+4) \cdot 3}{2}$ cm² = 18 cm²

2 **Een driehoek heeft een hoek van 86°. In de driehoek zijn de drie bissectrices getekend. Hoeveel graden is de hoek met het vraagteken?**



- *In de grote driehoek is de som van de twee andere hoeken 180° – 86° = 94°.*
- *In de kleine driehoek is de som van de twee scherpe hoeken 90° : 2 = 47° (def. bissectrice).*

De hoek met het vraagteken: 180° – 47° = 133°

3 **Van een driehoek zijn twee zijden elk 7 cm lang. De lengte van de derde zijde is een geheel aantal centimeters. Hoeveel cm is de grootste omtrek die zo'n driehoek kan hebben?**

A 14 **B** 15 **C** 21 **D** 27 **E** 28

De som van de twee gekende zijden is 14 cm. De lengte van de derde zijde moet korter zijn dan 14 cm (= de som van de twee andere zijden). 28 cm is bijgevolg geen mogelijke oplossing. Omdat de grootst mogelijke omtrek gevraagd wordt, is 27 cm het correcte antwoord.

4 **Van een stomphoekige en een scherphoekige driehoek zijn de volgende hoeken gekend: 120°, 80°, 55° en 10°. Hoe groot is de kleinste hoek van de scherphoekige driehoek?**

45°

120° is de enige stompe hoek. In deze driehoek blijft nog 60° over. De hoek van 55° of de hoek van 10° zijn mogelijkheden. 55° kan echter niet, want dan zou de scherphoekige driehoek hoeken van 80° en 10° en bijgevolg een rechte hoek hebben. De stomphoekige driehoek heeft dus hoeken van 120°, 10° en 50°. De scherphoekige driehoek heeft dan hoeken van 80°, 55° en 45°.