4 Rekenregels van machten

Dit kun je al

1 machten met een natuurlijke exponent berekenen
2 machten met een gehele exponent berekenen
3 terminologie in verband met de machtsverheffing correct gebruiken

Test jezelf

Elke vraag heeft maar één juist antwoord. Controleer je antwoord in de correctiesleutel.
Achter elke vraag staat een verwijzing naar extra oefeningen in je oefenboek.

	A	B	C	VERDER OEFENEN?
1 Welke uitdrukking is gelijk aan 100?	-100^1	$(2 \cdot 5)^2$	25^4	oef. 67
2 Welke macht is het grootst?	5^{-2}	$(-3)^0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	oef. 68
3 Welk getal is het grondtal in de macht -2^3?	2	-2	3	oef. 63

Dit heb je nodig

- leerwerkboek p. 69 - 82
- oefenboek nr. 293 - 354
- rekenmachine

Inhoud

G18 Machten vermenigvuldigen en delen

Op verkenning

a Machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen

- Vul de tabel in.

	$2^3 \cdot 2^6$	$a^2 \cdot a^5$
Noteer elke macht als een vermenigvuldiging.	$=(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)$	$=(a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)$
Werk de haakjes weg.	$=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$
Welke eigenschap pas je toe?	*Het vermenigvuldigen is associatief in $\mathbb{Q}$.*	*Het vermenigvuldigen is associatief in $\mathbb{Q}$.*
Noteer het resultaat als één macht.	$=2^9$	$=a^7$

- Vul de tabel in. De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

	NOTEER ELKE MACHT ALS EEN VERMENIGVULDIGING	NOTEER INDIEN MOGELIJK HET RESULTAAT ALS ÉÉN MACHT
$a^3 \cdot a^2 =$	$(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$	a^5
$\left(\frac{-1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=$	$\left[\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}$	$\left(\frac{-1}{2}\right)^3$
$6^2 \cdot 4^2 =$	$6\cdot 6\cdot 4\cdot 4$	$6^2\cdot 4^2$
$3^{-2} \cdot 3^3 =$	$\frac{1}{3\cdot 3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3=\frac{3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}}=3$	3
$x \cdot x^3 \cdot x^{-2} =$	$x\cdot(x\cdot x\cdot x)\cdot\frac{1}{x\cdot x}=\frac{x\cdot x\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}=x\cdot x$	x^2
$a^6 \cdot b =$	$(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot b$	$a^6\cdot b$
$5^{-3} \cdot 5^{-2} =$	$\frac{1}{5\cdot 5\cdot 5}\cdot\frac{1}{5\cdot 5}=\frac{1}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}$	$\frac{1}{5^5}=5^{-5}$

- Wanneer kun je het resultaat noteren als één macht?
  Als de factoren machten zijn met hetzelfde grondtal.
  - Wat doe je telkens met het grondtal? *Je behoudt het grondtal.*
  - Wat doe je telkens met de exponenten? *Je telt de exponenten op.*
- Je ontdekte hoe je machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigt.
  Deze rekenregel kun je ook kort en wiskundig noteren.
  - Neem $2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$
  - Vervang het grondtal 2 door de letter a en de exponenten 3 en 6 door de letters k en p. Noteer de gelijkheid met letters. $a^k \cdot a^p = a^{k+p}$
  - Door welke getallen kun je k en p vervangen in deze gelijkheid? *Door alle gehele getallen.*
- Noteer a^{-3} met een positieve exponent. $\frac{1}{a^3}$
  - Door welk getal kun je a zeker niet vervangen? *Door 0; $\frac{1}{0}$ is niet gedefinieerd.*
  - Door welke getallen kun je a wel vervangen in deze gelijkheid? *Door alle rationale getallen, maar niet door 0.*

Rekenregel – machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen		
Machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen: • Behoud het grondtal. • Tel de exponenten op.	a is een rationaal getal verschillend van 0 k en p zijn gehele getallen. $a^k \cdot a^p = a^{k+p}$	$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$ $a^{-8} \cdot a^{-3} = a^{-8+(-3)} = a^{-11} = \left(\frac{1}{a}\right)^{11} = \frac{1}{a^{11}}$

CONTROLE 11 Reken uit. Pas indien mogelijk de rekenregel toe.
De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

$5^2 \cdot 5 = 5^{2+1} = 5^3 = 125$

$5^3 \cdot 6^3 = 125 \cdot 216 = 27\,000$

$d^6 \cdot d^{-6} = d^{6+(-6)} = d^0 = 1$

$a^9 \cdot a^{-14} = a^{9+(-14)} = a^{9-14} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

b Machten met eenzelfde grondtal delen

- Vul de tabel in.

	$\frac{2^6}{2^2}$	$(a \neq 0)$ $a^2 : a^5$
Noteer elke macht als een vermenigvuldiging.	$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2}$	$= \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$
Vereenvoudig.	$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$= \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$
Noteer het resultaat als één macht.	$= 2^4$	$= \frac{1}{a^3} = a^{-3}$

- Vul de tabel in. De letters stellen rationale getallen voor ≠ 0.

	NOTEER ELKE MACHT ALS EEN VERMENIGVULDIGING	NOTEER INDIEN MOGELIJK HET RESULTAAT ALS ÉÉN MACHT
$\frac{4^6}{4^2} =$	$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4}$	4^4
$(-5)^3 : (-5)^2 =$	$\frac{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}{(-5) \cdot (-5)}$	$(-5)^1 = -5$
$\frac{h^2}{h^2} =$	$\frac{h \cdot h}{h \cdot h}$	$h^0 = 1$
$\frac{3^2}{2^3} =$	$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{3^2}{2^3}$
$2^{-4} : 2^3 =$	$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} : (2 \cdot 2 \cdot 2) = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{1}{2^7} = 2^{-7}$
$z^3 : z^{-2} =$	$z \cdot z \cdot z : \frac{1}{z \cdot z} = z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$	z^5
$10^3 : 3^{-3} =$	$10 \cdot 10 \cdot 10 : \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$10^3 \cdot 3^3$
$a^{-3} : a^{-3} =$	$\frac{1}{a \cdot a \cdot a} : \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$	$a^0 = 1$

- Wanneer kun je het resultaat noteren als één macht? Als het deeltal en de deler machten zijn met hetzelfde grondtal.
  - Wat doe je telkens met het grondtal? Je behoudt het grondtal.
  - Wat doe je telkens met de exponenten? Je bepaalt het verschil van de exponent van het deeltal en de exponent van de deler.

Machten vermenigvuldigen en delen (vervolg)

- Je ontdekt hier hoe je machten met eenzelfde grondtal deelt.
  Deze rekenregel kun je ook kort en wiskundig noteren.
  - Neem $2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$
  - Vervang het grondtal 2 door de letter a en de exponenten 2 en 6 door de letters k en p. Noteer de gelijkheid met letters. $a^k : a^p = a^{k-p}$
  - Door welke getallen kun je k en p vervangen in deze gelijkheid? Door alle gehele getallen.
- Noteer a^{-3} met een positieve exponent. $\frac{1}{a^3}$
  - Door welk getal kun je a zeker niet vervangen? Door 0; $\frac{1}{0}$ is niet gedefinieerd.
  - Door welke getallen kun je a wel vervangen in deze gelijkheid?
    Door alle rationale getallen, maar niet door 0.

Rekenregel – machten met eenzelfde grondtal delen		
Machten met eenzelfde grondtal delen: • Behoud het grondtal. • Trek de exponenten van elkaar af (exponent van het deeltal – exponent van de deler).	a is een rationaal getal verschillend van 0. k en p zijn gehele getallen. $a^k : a^p = a^{k-p}$	$9^8 : 9^6 = 9^{8-6} = 9^2 = 81$ $(x \neq 0)\quad \frac{x^9}{x^2} = x^{9-2} = x^7$ $10^{-4} : 10^{-2} = 10^{-4-(-2)} = 10^{-4+2} = 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

CONTROLE 12 Reken uit. Pas indien mogelijk de rekenregel toe.
De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

$\frac{15^8}{15^7} =$ $15^{8-7} = 15^1 = 15$

$d^7 : d^5 =$ $d^{7-5} = d^2$

$12^3 : 6^3 =$ $1728 : 216 = 8$

$\frac{p^9}{p^{-2}} =$ $p^{9-(-2)} = p^{9+2} = p^{11}$

Oefeningen

Algemene opmerkingen bij de oefeningen:
- De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.
- Vermijd negatieve exponenten in het eindresultaat.

WEER? 293 - 296
MEER? 297 - 299

1
- **Reken uit.**
- **Pas indien mogelijk de gepaste rekenregel toe.**

a $5^3 \cdot 5 =$ $5^{3+1} = 5^4 = 625$

b $a^6 \cdot a^{35} =$ $a^{6+35} = a^{41}$

c $b^{102} \cdot b^{-2} =$ $b^{102+(-2)} = b^{100}$

d $4^2 - 4^3 =$ $16 - 64 = -48$

e $1^{45} \cdot 1^{14} =$ $1^{45+14} = 1^{59} = 1$

f $10^2 \cdot 2^2 =$ $100 \cdot 4 = 400$

WEER? 300 - 302
MEER? 303 - 306

2
- **Reken uit.**
- **Pas indien mogelijk de gepaste rekenregel toe.**

a $\frac{4^4}{4} =$ $4^{4-1} = 4^3 = 64$

b $\frac{125^5}{125^4} =$ $125^{5-4} = 125^1 = 125$

c $d^2 : d^6 =$ $d^{2-6} = d^{-4} = \frac{1}{d^4}$

d $3^8 : 3^8 =$ $3^{8-8} = 3^0 = 1$

e $6^2 : 100^2 =$ $36 : 10\,000 = 0{,}0036$

f $\frac{f^{19}}{f^6} =$ $f^{19-6} = f^{13}$

WEER? 307 - 312
MEER? 313 314

3 • **Reken uit.**
• **Pas indien mogelijk de gepaste rekenregel toe.**

a $3^3 : 3^{-1} = 3^{3-(-1)} = 3^4 = 81$

b $99^{132} \cdot 99^{-133} = 99^{132+(-133)} = 99^{132-133} = 99^{-1} = \frac{1}{99}$

c $99^1 \cdot 1^{99} = 99 \cdot 1 = 99$

d $\frac{(-3)^2}{(-3)^{-1}} = (-3)^{2-(-1)} = (-3)^{2+1} = (-3)^3 = -27$

e $0{,}1^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1^{2+1} = 0{,}1^3 = 0{,}001$

f $5^3 + 5^{-2} = 125 + \frac{1}{25} = 125 + 0{,}04 = 125{,}04$

g $102^{10} : 102^9 = 102^{10-9} = 102^1 = 102$

h $d^{-2} \cdot d^{-6} = d^{-2+(-6)} = d^{-2-6} = d^{-8} = \frac{1}{d^8}$

MEER? 315 316

4 **In het midden van een vijver groeit een witte waterlelie. De lelie breidt zich zo snel uit, dat het aantal bloemen elke dag verdubbelt. Als de drijfplant ongestoord kan groeien dan is de vijver volledig bedekt in 12 dagen.**

a Vul in de tabel de tweede rij aan die het verband aangeeft tussen de tijd en het aantal bloemen.
b Noteer in de laatste rij het aantal bloemen als een macht met grondtal 2.

TIJD (IN DAGEN)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AANTAL BLOEMEN	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
ALS MACHT 2^N	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

c Zoek het antwoord op onderstaande vragen. Je mag hiervoor alleen een beroep doen op de machten uit de laatste rij van de tabel en op de gepaste rekenregel.

– Na hoeveel dagen is de vijver half bedekt?

$2^{12} : 2 = 2^{12-1} = 2^{11}$

Na 11 dagen is de vijver half bedekt.

– Na vier dagen is 1 m² van de vijver gevuld met 2^4 bloemen. Wat is de oppervlakte van de vijver?

$2^{12} : 2^4 = 2^8 = 256$

De oppervlakte van de vijver is 256 m².

Wat moet je kunnen?
- ☐ machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen
- ☐ machten met eenzelfde grondtal delen
- ☐ de rekenregels verwoorden

Een macht tot een macht verheffen

Op verkenning

- Vul de tabel in.

	$(3^2)^3$	$(a \neq 0)$ $(a^2)^3$
Noteer de derdemacht als een vermenigvuldiging van kwadraten.	$= 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$	$= a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$
Noteer het resultaat als één macht.	$= 3^6$	$= a^6$

- Vul de tabel in.
  De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

	NOTEER DE MACHT ALS EEN VERMENIGVULDIGING	NOTEER HET RESULTAAT ALS ÉÉN MACHT
$\left((-4)^4\right)^2 =$	$(-4)^4 \cdot (-4)^4$	$(-4)^8$
$(3^5)^3 =$	$3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5$	3^{15}
$(b^2)^6 =$	$b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2$	b^{12}
$\left(\left(\frac{5}{k}\right)^{-3}\right)^2 =$	$\left(\frac{5}{k}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{k}\right)^{-3}$	$\left(\frac{5}{k}\right)^{-6} = \left(\frac{k}{5}\right)^6$
$(a^{-2})^2 =$	$a^{-2} \cdot a^{-2}$	$a^{-4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4$
$(0^2)^5 =$	$0^2 \cdot 0^2 \cdot 0^2 \cdot 0^2 \cdot 0^2$	$0^{10} = 0$

- Hoe kun je een macht tot een macht verheffen?
  - Wat doe je telkens met het grondtal? *Je behoudt het grondtal.*
  - Wat doe je telkens met de exponenten? *Je vermenigvuldigt de exponenten.*
- Je ontdekt hier hoe je een macht tot een macht verheft. Deze rekenregel kun je ook kort en wiskundig noteren.
  - Neem $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$
  - Vervang het grondtal 4 door de letter a en de exponenten 2 en 3 door de letters k en p.
  - Noteer de gelijkheid met letters. $(a^k)^p = a^{k \cdot p}$
  - Door welke getallen kun je k en p vervangen in deze gelijkheid?
    Door alle gehele getallen.
  - Mag je a door alle getallen vervangen? Verklaar.
    Door alle rationale getallen, maar niet door 0.

Rekenregel – een macht tot een macht verheffen		
Een macht tot een macht verheffen: • Behoud het grondtal. • Vermenigvuldig de exponenten.	a is een rationaal getal verschillend van 0. k en p zijn gehele getallen. $(a^k)^p = a^{k \cdot p}$	$(2^2)^3 = 2^{2\cdot3} = 2^6 = 64$ $(5^{-1})^{-2} = 5^{(-1)\cdot(-2)} = 5^2 = 25$ $(a^3)^5 = a^{3\cdot5} = a^{15}$

Oefeningen

Algemene opmerkingen bij de oefeningen:

– Als een letter als grondtal wordt gebruikt, dan stelt deze letter een waarde voor verschillend van 0.
– Vermijd negatieve exponenten in het eindresultaat.

5 • **Reken uit.** WEER? 317 - 319
• **Pas de gepaste rekenregel toe.** MEER? 320 - 323

a $(2^2)^3 = 2^{2\cdot3} = 2^6 = 64$

b $(9^{-2})^{-1} = 9^{-2\cdot(-1)} = 9^2 = 81$

c $(a^{-3})^{-4} = a^{-3\cdot(-4)} = a^{12}$

d $((-g)^2)^{-3} = (-g)^{-6} = \left(-\frac{1}{g}\right)^6 = \frac{1}{g^6}$

e $(2^3)^{-2} = 2^{3\cdot(-2)} = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

f $(a^8)^2 = (a)^{8\cdot2} = (a)^{16} = a^{16}$

6 • **Reken uit.** WEER? 324
• **Pas de gepaste rekenregel toe.** MEER? 325 326

a $(10^4)^2 = 10^{4\cdot2} = 10^8 = 100\,000\,000$

b $p^3 \cdot p^{-2} = p^{3+(-2)} = p^{3-2} = p$

c $a^{-2} : a^{-4} = a^{-2-(-4)} = a^{-2+4} = a^2$

d $(k^3)^3 = k^{3\cdot3} = k^9$

e $\frac{b^5}{b^2} = b^{5-2} = b^3$

f $x^{-2} \cdot x^{-3} = x^{-2+(-3)} = x^{-5} = \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5}$

7 **Vul in. Verklaar door de oplossing te berekenen met machten van 10.** WEER? 327

a 1 triljard : duizend = 1 triljoen — $10^{21} : 10^3 = 10^{18}$

b 1 miljard · 1 biljard = 1 quadriljoen — $10^9 \cdot 10^{15} = 10^{24}$

c 1 triljoen : 1 biljoen = 1 miljoen — $\frac{10^{18}}{10^{12}} = 10^6$

d 1 miljoen · 1 triljard = 1 quadriljard — $10^6 \cdot 10^{21} = 10^{27}$

e (1 miljard)² = 1 triljoen — $(10^9)^2 = 10^{18}$

f (1 quadriljoen)⁰ = 1 — $(10^{27})^0 = 1$

een miljoen = 10^6
een miljard = 10^9
een biljoen = 10^{12}
een biljard = 10^{15}
een triljoen = 10^{18}
een triljard = 10^{21}
een quadriljoen = 10^{24}
een quadriljard = 10^{27}

Wat moet je kunnen?

☐ een macht tot een macht verheffen
☐ de rekenregel verwoorden

Een product en een quotiënt tot een macht verheffen

Op verkenning

a Een product tot een macht verheffen

- Vul de tabel in.

	$(2 \cdot 4)^3$	$(5a)^3$
Noteer de derdemacht als een vermenigvuldiging.	$(2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4)$	$(5 \cdot a) \cdot (5 \cdot a) \cdot (5 \cdot a)$
Plaats de gelijke factoren samen tussen haakjes.	$(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4)$	$(5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (a \cdot a \cdot a)$
Welke eigenschappen van bewerkingen pas je toe?	Het vermenigvuldigen is commutatief en associatief in $\mathbb{Q}$.	Het vermenigvuldigen is commutatief en associatief in $\mathbb{Q}$.
Noteer als een vermenigvuldiging van twee machten.	$= 2^3 \cdot 4^3$	$= 5^3 \cdot a^3$

- Vul de tabel in.
  De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

	NOTEER DE MACHT ALS EEN VERMENIGVULDIGING. PLAATS DE GELIJKE FACTOREN SAMEN TUSSEN DE HAAKJES	NOTEER HET RESULTAAT ALS EEN VERMENIGVULDIGING VAN MACHTEN
$(a \cdot b)^3 =$	$(a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b)$	$a^3 \cdot b^3$
$(-9 \cdot 5)^2 =$	$(-9 \cdot 5) \cdot (-9 \cdot 5) = \big((-9) \cdot (-9)\big)(5 \cdot 5)$	$(-9)^2 \cdot 5^2$
$(xyz)^{-2} = \frac{1}{(xyz)^2}$	$\frac{1}{(xyz)(xyz)} = \frac{1}{(xx)(yy)(zz)}$	$\frac{1}{x^2y^2z^2}$
$\left(\frac{-1}{2}a^2\right)^3 =$	$\left(\frac{-1}{2}a^2\right)\left(\frac{-1}{2}a^2\right)\left(\frac{-1}{2}a^2\right) = \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) \cdot (a^2 \cdot a^2 \cdot a^2)$	$\left(\frac{-1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \cdot a^6$

- Hoe kun je een product tot een macht verheffen? Wat doe je telkens met de factoren?

  Je verheft elke factor tot die macht.

- Je ontdekte hoe je een product tot een macht verheft. Deze rekenregel kun je ook kort en wiskundig noteren.
  - Neem $(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3$
  - Vervang de factoren 2 en 4 door de letters a en b en de exponent 3 door de letter m. Noteer de gelijkheid met letters.

    $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
  - Door welke getallen kun je m vervangen in deze gelijkheid? *Door alle gehele getallen.*
  - Mag je a en b door alle getallen vervangen? Verklaar.

    Door alle rationale getallen, maar niet door 0. $(ab)^{-2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}$ *a, b mogen niet gelijk zijn aan 0.*

Rekenregel – een product tot een macht verheffen		
Een product tot een macht verheffen: verhef elke factor van het product tot die macht.	a en b zijn rationale getallen, verschillend van 0 p is een geheel getal $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$(9 \cdot t)^2 = 9^2 \cdot t^2 = 81t^2$ $(x \neq 0)$ $(2x)^{-1} = 2^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$ $(-0{,}5p)^3 = (-0{,}5)^3 \cdot p^3 = -0{,}125p^3$

CONTROLE 13 Reken uit. De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.
Pas de rekenregel toe indien mogelijk.

$(-10p)^4 = (-10)^4 \cdot p^4 = 10\,000\,p^4$

$(-4x)^3 = (-4)^3x^3 = -64x^3$

$(4 \cdot a)^{-3} = 4^{-3} \cdot a^{-3} = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{64a^3}$

$(4 - x)^3 = (4 - x)(4 - x)(4 - x)$

b **Een quotiënt tot een macht verheffen**

- Vul de tabel in.

	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$(k \neq 0)$ $(7:k)^3$
Noteer de derdemacht als een vermenigvuldiging.	$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$= \left(\frac{7}{k}\right)\left(\frac{7}{k}\right)\left(\frac{7}{k}\right)$
Noteer op één breukstreep.	$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3}$	$= \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{k \cdot k \cdot k}$
Noteer als een deling van twee machten.	$= \frac{2^3}{3^3}$	$= \frac{7^3}{k^3}$

- Vul de tabel in.
  De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

	NOTEER DE MACHT ALS EEN VERMENIGVULDIGING. NOTEER OP ÉÉN BREUKSTREEP	NOTEER ALS EEN DELING VAN TWEE MACHTEN
$\left(\frac{9}{7}\right)^3 =$	$\left(\frac{9}{7}\right)\left(\frac{9}{7}\right)\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{7 \cdot 7 \cdot 7}$	$\frac{9^3}{7^3}$
$(14:3)^5 =$	$\left(\frac{14}{3}\right)^5 = \frac{14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\frac{14^5}{3^5}$
$\left(\frac{-c}{d}\right)^2 =$	$\left(\frac{-c}{d}\right)\left(\frac{-c}{d}\right) = \frac{-c \cdot (-c)}{d \cdot d}$	$\frac{(-c)^2}{d^2} = c^2$
$(-2:a^3)^{-2}$	$\left(\frac{-2}{a^3}\right)^{-2} = \left(\frac{a^3}{-2}\right)^2 = \left(\frac{a^3}{-2}\right)\left(\frac{a^3}{-2}\right) = \frac{a^3 \cdot a^3}{(-2) \cdot (-2)}$	$\frac{a^6}{(-2)^2} = \frac{(-2)^{-2}}{a^{-6}}$

- Hoe kun je een quotiënt tot een macht verheffen? Wat doe je telkens met het deeltal en de deler?

  Je verheft het deeltal en de deler tot die macht.

- Je ontdekt hier hoe je een quotiënt tot een macht verheft. Deze rekenregel kun je ook kort en wiskundig noteren.
  - Neem $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
  - Vervang het deeltal 2 door de letter a, de deler 3 door de letter b en exponent 4 door de letter m.

    Noteer de gelijkheid met letters. $(a:b)^m = a^m : b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
  - Door welke getallen kun je m vervangen in deze gelijkheid?

    Door alle gehele getallen.
  - Mag je a en b door alle getallen vervangen? Verklaar.

    Door alle rationale getallen, maar niet door 0. De noemer mag niet gelijk zijn aan 0.

Rekenregel – een quotiënt tot een macht verheffen		
Een quotiënt tot een macht verheffen: verhef het deeltal en de deler tot die macht.	a en b zijn rationale getallen, verschillend van 0 p is een geheel getal $(a:b)^p = a^p : b^p$	$(p \neq 0)$ $(4:p)^2 = 4^2 : p^2 = 16 : p^2$ $\left(\frac{-10}{7}\right)^4 = \frac{(-10)^4}{7^4} = \frac{10\,000}{2\,401}$

CONTROLE 14 Reken uit. Pas indien mogelijk de rekenregel toe.
De letters stellen rationale getallen voor verschillend van 0.

$(1:4)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$

$\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{-2^3}{5^3} = \frac{-8}{125}$

$\left(\frac{a}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{a}\right)^4 = \frac{3^4}{a^4} = \frac{81}{a^4}$

$\left(\frac{-0{,}5}{p}\right)^2 = \frac{(-0{,}5)^2}{p^2} = \frac{0{,}25}{p^2}$

Oefeningen

Algemene opmerkingen bij de oefeningen:

- Als een letter als grondtal wordt gebruikt, dan stelt deze letter een waarde voor verschillend van 0.
- Vermijd negatieve exponenten in het eindresultaat.

WEER? 328 329
MEER? 330

8
- **Reken uit.**
- **Pas de gepaste rekenregel toe.**

a $(-5\cdot x)^3 = (-5)^3\cdot x^3 = -125x^3$

c $(a\cdot x)^4 = a^4x^4$

b $(-2\cdot 10)^4 = (-2)^4\cdot 10^4 = 16\cdot 10\,000 = 160\,000$

d $100\cdot(-a)^2 = 100a^2$

WEER? 331 332

9
- **Reken uit.**
- **Pas de gepaste rekenregel toe.**

a $\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$

c $\left(\frac{m}{k}\right)^8 = \frac{m^8}{k^8}$

b $\left(\frac{3}{p}\right)^3 = \frac{3^3}{p^3} = \frac{27}{p^3}$

d $(-3:11)^2 = \left(\frac{-3}{11}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{11^2} = \frac{9}{121}$

WEER? 333 - 335
MEER? 336 - 341

10
- **Reken uit.**
- **Pas de gepaste rekenregel toe.**

$a^k\cdot a^p = a^{k+p}$
$a^k : a^p = a^{k-p}$
$(a^k)^p = a^{k\cdot p}$
$(a\cdot b)^k = a^k\cdot b^k$
$(a : b)^k = a^k : b^k$

a $(-5\cdot 10^{-2})^2 = (-5)^2\,(10^{-2})^2 = 25\cdot 10^{-4} = 25\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{25}{10000} = \frac{1}{400}$

b $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{(10)^2}{(3)^2} = \frac{100}{9}$

c $\frac{(-3)^2}{(-3)^1} = (-3)^{2-1} = (-3)^1 = -3$

d $d^{-2}\cdot d^{-6} = d^{-2+(-6)} = d^{-8} = \frac{1}{d^8}$

e $(10^{-4})^{-2} = 10^{-4\cdot(-2)} = 10^8 = 100\,000\,000$

g $(-2ab)^{-5} = \left(-\frac{1}{2ab}\right)^5 = -\frac{1}{2^5a^5b^5} = -\frac{1}{32a^5b^5}$

f $\frac{f^{-1}}{f^9} = f^{-1-9} = f^{-10} = \frac{1}{f^{10}}$

h $-(3^2)^{-2} = -3^{2\cdot(-2)} = -3^{-4} = -\left(\frac{1}{3}\right)^4 = -\frac{1}{81}$

11 **a** Reken uit. Let op de volgorde van de bewerkingen.

WEER? 342

$(5 + 2)^2 = 7^2 = 49$ $\qquad$ $5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$

b Kun je hier één van de rekenregels toepassen? Verklaar.

Neen, de macht van een som is niet gelijk aan de som van de machten.

c Vul in met = of ≠. Verklaar.

$(1 + 5)^2 \neq 1^2 + 5^2$ De macht van een som is niet gelijk aan de som van de machten.

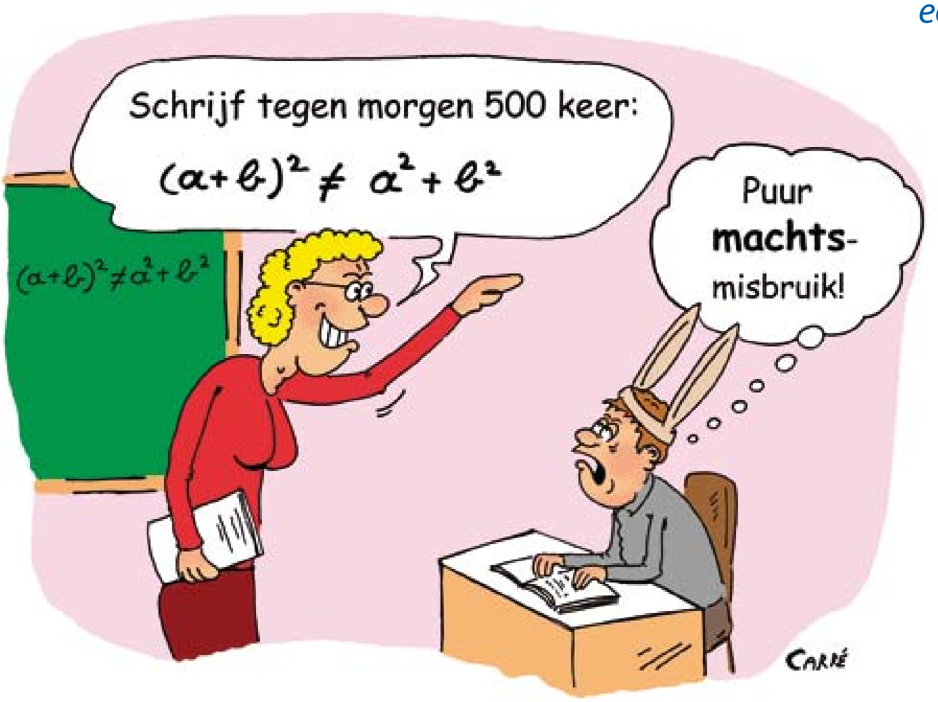
$(2 \cdot 10)^2 = 2^2 \cdot 10^2$ De rekenregel voor de macht van een product.

$(2 \cdot b)^2 = 2^2 \cdot b^2$ De rekenregel voor de macht van een product.

$(2 - b)^2 \neq 2^2 - b^2$ De macht van een som is niet gelijk aan de som van de machten.

$(a + 3)^2 \neq a^2 + 9$ De macht van een som is niet gelijk aan de som van de machten.

$(a \cdot b)^2 = a^2\, b^2$ De rekenregel voor de macht van een product.



Wat moet je kunnen?

- ☐ een product tot een macht verheffen
- ☐ een quotiënt tot een macht verheffen
- ☐ de rekenregels verwoorden

Rekenregels van machten noteren in symbolen

Op verkenning

- Vul aan:
  Om machten met eenzelfde grondtal te vermenigvuldigen,
  behoud je het grondtal en tel je de exponenten op.
- Vul aan: $a^p \cdot a^k = a^{p+k}$
  - Door welke getallen kun je in deze gelijkheid de letter a vervangen? Je onderzocht dit in de 'op verkenning' van les G18. Noteer je antwoord volledig in symbolen.
    $\forall a \in \mathbb{Q}_0$
  - Door welke getallen kun je in deze gelijkheid p en k vervangen? Je onderzocht dit in de 'op verkenning' van les G18. Noteer je antwoord volledig in symbolen.
    $\forall p, k \in \mathbb{Z}$
- Noteer de volledige rekenregel in symbolen.
  $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall p, k \in \mathbb{Z}: a^p \cdot a^k = a^{p+k}$

Rekenregels van machten

	$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall p, k \in \mathbb{Z}$:	
Machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen.	$a^p \cdot a^k = a^{p+k}$	$12^6 \cdot 12^{-4} = 12^2$
Machten met eenzelfde grondtal delen.	$a^p : a^k = a^{p-k}$	$10^{-3} : 10^2 = 10^{-5}$
Een macht tot een macht verheffen.	$(a^p)^k = a^{p \cdot k}$	$(25^{-2})^{-2} = 25^4$
Een product tot een macht verheffen.	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$(6de)^3 = 6^3d^3e^3 = 216d^3e^3$
Een quotiënt tot een macht verheffen.	$(a : b)^p = a^p : b^p$	$(4 : c)^2 = 4^2 : c^2 = 16 : c^2$ $(c \neq 0)$

Oefeningen

Algemene opmerkingen bij de oefeningen:
- Als een letter als grondtal wordt gebruikt, dan stelt deze letter een waarde voor verschillend van 0.
- Vermijd negatieve exponenten in het eindresultaat.

WEER? 343
MEER? 344

12 Juist of fout? Verklaar.

a $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall m \in \mathbb{N}: (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Juist de rekenregel geldt ook voor $m \in \mathbb{Z}$, dus ook voor $m \in \mathbb{N}$

b $\forall a, b \in \mathbb{Q}, \forall m \in \mathbb{N}: (a : b)^m = a^m : b^m$
Fout, het moet zijn: $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0$

c $\forall a, b \in \mathbb{Q}, \forall m \in \mathbb{N}: (a + b)^m = a^m + b^m$
Fout, de macht van een som is niet gelijk aan de som van de machten.

WEER? 345 346
MEER? 347 - 349

13 Reken uit.

a $(-2a^3)^2 = (-2)^2 \cdot (a^3)^2 = 4a^6$

b $(a^p)^{-2} = a^{-2p} = \frac{1}{a^{2p}}$

c $\left(\frac{r}{s}\right)^{-t-8} = \left(\frac{r}{s}\right)^{-(t+8)} = \left(\frac{s}{r}\right)^{(t+8)} = \frac{s^{t+8}}{r^{t+8}}$

d $\frac{10^p}{10^{p-6}}$ = $10^{p-(p-6)} = 10^{p-p+6} = 10^6 = 1\,000\,000$

e $(19 + a^7)^3$ = Je kunt geen rekenregel toepassen omdat je geen regel kent om een som tot een macht te verheffen.

f $(x^{-2})^{-3} + (x^{-6})^{-1}$ = $x^6 + x^6 = 2x^6$

14 • **Reken uit.**
• **Pas indien mogelijk de gepaste rekenregel toe.**

WEER? 350

a $2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2}$ = $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

MEER? 351 352

b $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$ = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

c $(a^0)^{-4} + (a^4)^0$ = $a^0 + a^0 = 1 + 1 = 2$

d $x \cdot x^{-5} + x^2 \cdot x^{-6}$ = $x^{1-5} + x^{2-6} = x^{-4} + x^{-4} = 2x^{-4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = \frac{2}{x^4}$

15 a Reken uit en geef het antwoord in de wetenschappelijke schrijfwijze.

WEER? 353

MEER? 354

a $(5 \cdot 10^8) \cdot (2 \cdot 10^7)$ = $5 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^7 = (5 \cdot 2)(10^8 \cdot 10^7) = 10 \cdot 10^{15} = 10^{16} = 1 \cdot 10^{16}$

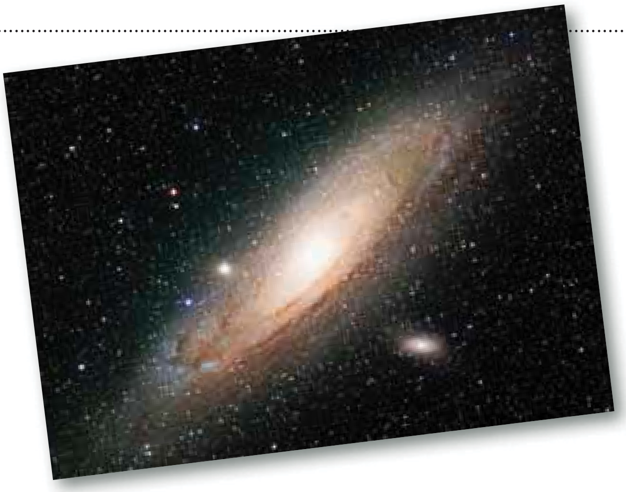
b $(3{,}5 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^3)$ = $3{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^3 = 14 \cdot 10^{-5} = 1{,}4 \cdot 10 \cdot 10^{-5} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$

c $(5 \cdot 10^{-6}) \cdot (25 \cdot 10^8)$ = $5 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^8 = 125 \cdot 10^2 = 1{,}25 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 1{,}25 \cdot 10^4$

d $(0{,}1 \cdot 10^{-2})^{-110}$ = $(10^{-1} \cdot 10^{-2})^{-110} = (10^{-3})^{-110} = 10^{330} = 1 \cdot 10^{330}$

b Een lichtjaar is de afstand die een lichtstraal met een snelheid van 300 000 km per seconde aflegt in één jaar. Een lichtjaar is $9{,}461 \cdot 10^{12}$ km. De Andromedanevel ligt op een afstand van ongeveer 2,2 miljoen lichtjaar. Bereken de afstand aarde-Andromeda in km. Geef je antwoord in de wetenschappelijke schrijfwijze.

2,2 miljoen $\cdot\ 9{,}461 \cdot 10^{12}$ km
$= 2{,}2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}641 \cdot 10^{12}$ km
$= 2{,}2 \cdot 9{,}641 \cdot 10^{12} \cdot 10^6$ km
$= 20{,}8142 \cdot 10^{18}$ km
$= 2{,}08142 \cdot 10 \cdot 10^{18}$ km
De afstand van de Andromedanevel tot de aarde is $2{,}08142 \cdot 10^{19}$ km.



Wat moet je kunnen?

☐ de rekenregels van machten in symbolen weergeven

16 **Bereken de som van de eerste 100 oneven getallen.**

1 $\quad 1 = 1^2$ $\quad \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots}_{n \text{ termen}} = n^2$

$1 + 3 =$ $\quad 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 =$ $\quad 9 = 3^2$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 199 = 100^2 = 10\,000$

$1 + 3 + 5 + 7 =$ $\quad 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$ $\quad 25 = 5^2$

17 **De toren van Hanoi**

De legende vertelt dat in de stad Benares onder keizer Fo Hi een boeddhistische tempel stond. De grote middenkoepel markeerde het midden van de wereld. In deze koepels waren priesters continu bezig met het verplaatsen van gouden schijven die op diamanten punten stonden. God plaatste 64 schijven van groot naar klein op één pin. Zodra de hele stapel naar een andere pin verplaatst is, zal dat het einde van de wereld betekenen. Reken uit hoe lang dit duurt als je elke seconde één schijf verplaatst.

Verplaats de toren door alle schijven te verplaatsen naar een ander stokje.

a Er mag slechts 1 schijf tegelijk worden verplaatst.
b Een grotere schijf mag nooit op een kleinere rusten.

Is er een oneven aantal schijven, leg dan de eerste schijf op de stok waarop je uiteindelijk wilt eindigen. Is er een even aantal schijven, leg dan de eerste schijf op een andere stok. Het aantal zetten is steeds het dubbele van de vorige stapel +1.

aantal schijven	1	2	3	4	5	n	64
aantal zetten	$1 = 2^1 - 1$	$3 = 2^2 - 1$	$7 = 2^3 - 1$	$15 = 2^4 - 1$	$31 = 2^5 - 1$	$2^n - 1$	$1{,}84467441 \cdot 10^{19} = 2^{64} - 1$

Voor 64 schijven heb je ongeveer $5{,}8 \cdot 10^{10}$ jaar nodig.

18 **De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°. Van een driehoek ABC is hoek A drie keer zo groot als hoek B en half zo groot als hoek C. Hoe groot is hoek A?**

$|\hat{A}| = 3|\hat{B}| \Rightarrow |\hat{B}| = \frac{1}{3}|\hat{A}|$ *en* $|\hat{A}| = \frac{1}{2}|\hat{C}| \Rightarrow |\hat{C}| = 2|\hat{A}|$

$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$

$|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}| + 2|\hat{A}| = 180°$

$3\left(|\hat{A}| + \frac{1}{3}|\hat{A}| + 2|\hat{A}|\right) = 3 \cdot 180°$

$3|\hat{A}| + |\hat{A}| + 6|\hat{A}| = 540°$

$10|\hat{A}| = 540°$

$|\hat{A}| = 540° : 10$

$|\hat{A}| = 54°$

19 **Het product van twee gehele getallen is gelijk aan $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$.**
De som van deze getallen kan dan deelbaar zijn door:

A 3 **B** 5 **C** 8 **D** 10 **E** 49

De som kan niet deelbaar zijn door 5 want slechts één van de twee getallen is deelbaar door 5. De som kan dan zeker niet deelbaar zijn door 10.
De som kan niet deelbaar zijn door 8 want $8 = 2^3$ en $2^5 = 2^3 \cdot 2^2$. Slechts één van de termen is deelbaar door 8.